ISSN 2354-0575

NỘI SUY HERMITE BẰNG CÔNG CỤ GIẢI TÍCH PHỨC

Nguyễn Thị Loan
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 03/07/2018
Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 23/08/2018
Ngày bài báo được duyệt đăng: 03/09/2018

Tóm tắt:
Bài báo trình bày phương pháp xây dựng công thức nội suy Hertmite, trong đó có sử dụng công cụ của giải tích phức thay vì dung công cụ của đại số tuyến tính. Cuối bài có đưa ra ví dụ minh họa ưu điểm của phương pháp này.

Từ khóa: *Hermite, nội suy, đa thức nội suy.*

1. Đặt vấn đề

Trong thực hành tính toán (nhất là trong các ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật) ta thường phải sử dụng những hàm y = $f(x)$ mà không thể biết biểu thức giải tích của chúng; chỉ biết các giá trị của hàm tại một số điểm nào đó của đoạn $[a, b]$, chúng được gọi là các điểm mốc, (các giá trị này có thể có được nhờ phép đo đạc thực nghiệm). Khi sử dụng các hàm này, nhiều khi ta cần biết giá trị của chúng tại một điểm ngoài những điểm mốc. Muốn vậy ta xây dựng hàm $F(x)$ có biểu thức đơn giản trùng với $f(x)$ tại các điểm mốc còn tại các điểm khác của đoạn $[a, b]$ thì "khá gần" với $f(x)$ và sau đó hàm $F(x)$ được sử dụng thay cho hàm $f(x)$. Bài toán xây dựng hàm $F(x)$ như vậy gọi là bài toán nội suy; hàm $F(x)$ gọi là hàm nội suy của $f(x)$ trên đoạn [a, b].

Bài toán nội suy còn được nêu ra dưới dạng tổng quát hơn: Không những đòi hỏi hàm $F(x)$ trùng với $f(x)$ tại các điểm nội suy mà còn đòi hỏi các đạo hàm cấp một hoặc cấp cao hơn của chúng cũng trùng nhau tại các mốc ấy. Đó là bài toán nội suy Hermite.

Bài toán nội suy Hermite là bài toán nội suy cổ điển tổng quát, tuy nhiên bài báo này khác với những tài liệu đã viết về vấn đề đó là sử dụng Lý thuyết thặng dư để xây dựng công thức nội suy thay cho việc dùng hệ phương trình truyền tính quen thuộc. Điều này có ý nghĩa trong giảng dạy cả môn Phương pháp tính và môn Hàm biến phức trong trường đại học kỹ thuật.

2. Đặt bài toán

Ta xét bài toán tìm đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (2.1)$$

thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j); j = 1,\ldots, m, s = 0,\ldots, \alpha_j - 1, \qquad (2.2)$$

(ở đây ta hiểu $f^{(0)}(x_j) = f(x_j)$). Với $x_j \in [a, b]$, $\forall j = \overline{1,m}$; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là m số thực khác nhau từng đôi một gọi là các mốc nội suy.

Giả thiết rằng tại các mốc x_j, $j = 1,\ldots, m$ cho trước giá trị hàm $f(x)$ và các giá trị của mọi đạo hàm đến cấp $(a_j - 1)$ của nó, tức là cho các giá trị

$$f(x_j), f'(x_j), \ldots, f^{(\alpha_j-1)}(x_j) \;\; \forall j = \overline{1,m}. \qquad (2.3)$$

Như vậy về hàm $f(x)$ ta biết trước $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n + 1$ điều kiện.

Các điều kiện (2.2) là một hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các hệ số cần xác định a_0, a_1, a_2, . . . , a_n của đa thức (2.1).

Việc xây dựng đa thức (2.1) theo các điều kiện (2.2) được gọi là *quá trình nội suy Hermite*, hay là *phép nội suy với mốc bội*. Các số α_j, $j = \overline{1,m}$ được gọi là bội của mốc x_j. Và ta kí hiệu đa thức nội suy Hermite này là $H_n(x)$.

3. Công thức nội suy Hermite

Quá trình xây dựng đa thức nội suy Hermite được tiến hành như sau:

Ta cần xác định các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, trong đa thức

$$H_n(x) = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (3.1)$$

Các hệ số này sẽ được xác định bởi hệ phương trình

$$H_n^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j);\; j = \overline{1,m}, s = \overline{0,\alpha_j - 1} \qquad (3.2)$$

Do vậy, chúng là tổ hợp tuyến tính của các giá trị $f^{(s)}(x_j)$ với các hệ số a_{kjs} phụ thuộc x_j, $j = \overline{1,m}$:

$$a_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{\alpha_j-1} a_{kjs} f^{(s)}(x_j); k = \overline{0,n}.$$

Thế các biểu thức a_k vào (3.1) ta thu được

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{\alpha_j-1} a_{kjs} f^{(s)}(x_j) x^{n-k}$$

Từ đó ta có thể viết $H_n(x)$ về dạng

$$H_n(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{\alpha_j-1} l_{js}(x) f^{(s)}(x_j) \qquad (3.3)$$

trong đó $l_{js} = \sum_{k=0}^{n} a_{kjs} x^{n-k}$ - là những đa thức bậc n.

Từ sự lý giải đó ta sẽ tìm đa thức (3.1) dưới dạng (3.3).

Trước tiên thay vì tìm $H_n(x)$ ta tìm phần dư $R_n(f;\ x) = f(x) - H_n(x)$, và sau đó sẽ tìm chính đa thức Hn(x).

3.1. Tìm phần dư $R_n(f; x)$.

Từ (3.3) thu được

$$R_n(f;x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) f^{(s)}(x_j) \qquad (3.4)$$

Đầu tiên giả thiết rằng $f(x)$ là hàm biến phức chỉnh hình trong miền đơn liên D chứa điểm nội suy x và các mốc $x_1, \ldots, x_m$ ở bên trong. Ta xem $x, x_1, \ldots, x_m$ là thực và $x \neq x_j$, . Giả sử chu tuyến đóng $\Gamma \subset D$ và bao mọi điểm $x, x_1, \ldots, x_m$. Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - x} dz \qquad (3.5)$$

và theo công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm cấp cao ta có

$$f^{(s)}(x_j) = \frac{s!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - x_j)^{s+1}} dz \qquad (3.6)$$

Từ (3.4), (3.5) và (3.6) thu được

$$R_n(f;x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \left[\frac{1}{z-x} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} \right] dz \qquad (3.7)$$

Vì $\frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} = \left(\frac{1}{z-x_j}\right)^{(s)}$, nên biểu thức $\frac{1}{z-x} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}}$ là phần dư của quá trình nội suy Hermite đối với hàm $\frac{1}{z-x}$, của biến x (theo công thức (3.4)). Do đó

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{1}{z-x} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} \qquad (3.8)$$

Số hạng thứ hai bên vế phải của (3.8) là hàm hữu tỷ của z, đó là tổng của các phân thức đơn giản. Đặt

$$\Omega(z) = (z-x_1)^{\alpha_1}(z-x_2)^{\alpha_2} \cdots (z-x_m)^{\alpha_m} \qquad (3.9)$$

Từ (3.8) và (3.9) suy ra mẫu số chung của (3.8) là $(z - x)\Omega(z)$. Do vậy,

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{Q(z)}{(z-x)\Omega(z)} \qquad (3.10)$$

Ta nhận thấy trong vế phải của (3.10) bậc của tử số bé hơn bậc của mẫu số vì $deg\Omega(z) = n + 1$, $deg(z - x) = 1$, nên suy ra $deg(z - x)\Omega(z) = n + 2$, trong khi đó

$$deg\Omega(z) \le \alpha_1 + \alpha_2 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_m = n + 1.$$

Tiếp theo ta sẽ chứng tỏ rằng $Q(z)$ không phụ thuộc z. Để làm điều đó ta cần chứng minh rằng bậc của $Q(z)$ đối với z là bằng không, tức là $degQ(z) = 0$.

Với $|z| > |x|$, $|z| > |x_j|$, $\forall j = \overline{1,m}$, ta có

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}},$$

và

$$\frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} = \left(\frac{1}{z-x_j}\right)^{(s)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_j^k}{z^{k+1}}\right)^{(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_j^k}{z^{k+1}}\right)^{(s)}$$

Điều này tương đương với

$$\frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \left(x_j^k\right)^{(s)} = $$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{z^{k+1}} x_j^{k-s}$$

với $\forall j = \overline{1,m}$. Thay các biểu thức này vào (3.8) ta được

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \left[x^k - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) k(k-1)\cdots(k-s+1) x_j^{k-s} \right]$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông là phần dư của quá trình nội suy Hermite đối với hàm x^k (theo công thức (3.4)). Do đó ta có

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} R_n\left(x^k, x\right)$$

Ta nhận thấy, nếu $k \le n$ thì $R_n(x^k; x) = 0$ (vì có thể lấy đa thức nội suy là x^k); nên trong công thức trên phép lấy tổng cần bắt đầu từ $k = n + 1$, tức là

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} R_n\left(x^k, x\right)$$

Từ đó, khi z $\rightarrow \infty$ thì $R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) \rightarrow 0$ với tốc độ bé nhất là như của $\frac{1}{z^{k+1}}$.

Từ đó và từ (3.10) suy ra $degQ(z) = 0$, tức là $Q(z)$ không phụ thuộc z.

Ta có thể giả sử $Q(z) = A$. Từ (3.8) ta lại có:

$$(z-x) R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) =$$

$$= 1 - (z-x) \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{\alpha_j - 1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}}$$

Do đó,

$$\lim_{z \to x} (z-x) R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = 1 \qquad (3.11)$$

(vì ta luôn xem $x \neq x_j$, $\forall j = \overline{1,m}$). Mặt khác, từ (3.10) ta lại có

$$(z-x) R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{A}{\Omega(z)}$$

Suy ra

$$\lim_{z\to x}(z-x)R_n\left(\frac{1}{z-x},x\right)=\frac{A}{\Omega(x)} \quad (3.12)$$

So sánh (3.11) với (3.12) ta có: $A = \Omega(x)$, và do đó

$$R_n\left(\frac{1}{z-x},x\right)=\frac{\Omega(x)}{(z-x)\Omega(z)} \quad (3.13)$$

Từ (3.7), (3.8) và (3.13) suy ra

$$R_n(f,x)=\frac{\Omega(x)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)}dz. \quad (3.14)$$

Công thức (3.14) là biểu diễn tích phân đối với phần dư của quá trình nội suy Hermite.

3.2. Tìm đa thức $H_n(x)$.

Sau khi tìm được phần dư $R_n(f; x)$ ta tìm đa thức $H_n(x)$. Từ công thức (3.14) ta rút ra được công thức biểu diễn đa thức nội suy Hermite

$H_n(x) = f(x) - R_n(f; x)$

$$= f(x) - \frac{\Omega(x)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(x)}{(z-x)\Omega(z)}dz. \quad (3.15)$$

Để tìm đa thức $H_n(x)$ tường minh ta cần tính tích phân ở vế phải của (3.15). Tích phân đó được tính bằng cách áp dụng định lý thặng dư. Ta lưu ý rằng thặng dư của hàm $F(z)$ tại điểm bất thường a (cực điểm hoặc điểm bất thường cốt yếu) là bằng hệ số a_{-1} trong khai triển Laurent của hàm đó tại lân cận điểm a. Ta thấy hàm dưới dấu tích phân

$$F(z)=\frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)} \quad (3.16)$$

có các cực điểm tại $z = x$, $z = x_j$, $\forall j=\overline{1,m}$. Tại cực điểm $z = x$, ta có $F(z)=\dfrac{f(z)}{\Omega(z)}(z-x)^{-1}$.

Do đó,

$$Res[F(z); x]=\frac{f(x)}{\Omega(x)} \quad (3.17)$$

Tiếp theo ta tính $Res[F(z); x_j]$, $\forall j=\overline{1,m}$. Để làm điều này ta viết $F(z)$ dưới dạng

$$F(z)=\frac{1}{(z-x_j)^{\alpha_j}}\cdot f(z)\cdot\frac{1}{z-x}\frac{(z-x_j)^{\alpha_j}}{\Omega(z)},$$

và khai triển nó thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = x_j$, sau đó tìm hệ số của $(z-x_j)^{\alpha_j-1}$ trong tích $f(z)\cdot\dfrac{1}{z-x}\cdot\dfrac{(z-x_j)^{\alpha_j}}{\Omega(z)}$.

Ta có

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}(z-x_j)^k, \quad (3.18)$$

Và

$$\frac{1}{z-x}=-\frac{1}{x-x_j}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-x_j}{x-x_j}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x-x_j)^{k+1}}(z-x_j)^k$$

(vì $\left|\dfrac{z-x_j}{x-x_j}\right|\le 1$), (3.19)

$$\frac{(z-x_j)^{\alpha_j}}{\Omega(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{(j)}(z-x_j)^k. \quad (3.20)$$

Để tìm thặng dư của hàm $f(z)$ tại cực điểm $z = x_j$ ta cần tìm hệ số của $(z-x_j)^{\alpha_j-1}$ trong tích các chuỗi (3.18), (3.19), (3.20). Hệ số đó bằng

$$\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}A_{\alpha_j-1-k},$$

trong đó, A_{α_j-1-k} là hệ số của $(z-x_j)^{\alpha_j-1}$ trong tích (3.18) với (3.19) và

$$A_{\alpha_j-1-k}=-\sum_{r=0}^{\alpha_j-1-k}C_r^{(j)}\frac{1}{(x-x_j)^{\alpha_j-1-k}}.$$

Như vậy, thặng dư của $F(z)$ tại điểm x_j bằng

$$[ResF(z);x_j]=-\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}\sum_{r=0}^{\alpha_j-1-k}C_r^{(j)}(x-x_j)^{-\alpha_j+k+r}$$

(3.21)

Từ (3.15) và từ định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư ta có,

$$H_n(x)=f(x)-2\pi i\frac{\Omega(x)}{2\pi i}\left(\left[\mathrm{Res}F(z);x\right]+\sum_{j=1}^{m}\left[\mathrm{Res}F(z);x_j\right]\right)$$

Theo định nghĩa thặng dư và từ công thức (3.21) ta có:

$$H_n(x)=f(x)-\Omega(x)\left(\frac{f(x)}{\Omega(x)}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}\sum_{r=0}^{\alpha_j-1-k}C_r^{(j)}(x-x_j)^{-\alpha_j+k+r}.\right)$$

Vậy,

$$H_n(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\Omega(x)}{(x-x_j)^{\alpha_j}}\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}\sum_{r=0}^{\alpha_j-1-k}C_r^{(j)}(x-x_j)^{k+r}$$

(3.22)

Từ (3.22) cũng rút ra kết luận rằng nó vẫn luôn đúng khi f(x) chỉ thoả mãn điều kiện (2.1).

3.3. Ví dụ áp dụng

Để minh họa phương pháp trên, sau đây ta sẽ xét một ví dụ cụ thể.

Xây dựng đa thức $P(x)$ với các mốc nội suy là: 0, 1, 3; các giá trị $P(x)$ tương ứng với các mốc nội suy đó là: 1, 2, 3; các giá trị $P'(x)$ tương ứng là: 1, 1, -1 và $P''(0) = -2$.

Từ phương pháp đã được trình bày ở trên, ta xét đa thức $\Omega(x) = x^3(x-1)^2(x-3)^2$. Ta tìm 3 số hạng đầu của khai triển (3.20) đối với mốc bội ba là $x_1 = 0$:

$$\frac{x^3}{\Omega(x)}=\frac{1}{(x-1)^2(x-3)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}$$

(3.23)

Vì $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ và $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'$, nên

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=1+2x+3x^2+\cdots \quad (3.24)$$

Tương tự

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}=3\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{x}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\cdots \quad (3.25)$$

Thay (3.24), (3.25) vào (3.23) và lấy đến số hạng thứ ba ta được:

$$\frac{x^3}{\Omega(x)}=\frac{1}{9}\left(1+\frac{8}{3}x+\frac{14}{3}x^2+\cdots\right)$$

Tương tự tìm hai số hạng đầu trong các khai triển (3.20) đối với mốc nội suy $x_2 = 1$:

$$\frac{(x-1)^2}{\Omega(x)}=\frac{1}{x^3(x-3)^2}$$

Xét $\frac{1}{x^3}=\frac{1}{(1+x-1)^3}$, ta có

nên suy ra

$$\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)''=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k x^k\right)''$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k(k-1)x^{k-2}\right)$$

Do đó

$$\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k(k-1)(x-1)^{k-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-3\cdot 2(x-1)+\cdots\right]=1-3(x-1)+\cdots$$

Tương tự

$$\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{(-2+x-1)^2}=-\left(\frac{1}{-2+x-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k-1}}(x-1)^{k-1}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(x-1)+\cdots$$

Từ những điều trên suy ra

$$\frac{(x-1)^2}{\Omega(x)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(x-1)+\cdots$$

Hoàn toàn tương tự ta có hai số hạng đầu trong khai triển (3.20) đối với $x_3 = 3$:

$$\frac{(x-3)^2}{\Omega(x)}=\frac{1}{108}-\frac{1}{54}(x-3)+\cdots$$

Áp dụng (3.22) và thay các giá trị của $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$ từ đề bài ta thu được

$$P(x)=\frac{(x-1)^2(x-3)^2}{9}\left(1+\frac{11}{3}x+\frac{19}{3}x^2\right)+$$

$$+\frac{x^3(x-3)^2}{4}(5-3x)+\frac{x^3(x-1)^2}{108}(24-7x)$$

Từ đó suy ra

$$\mathrm{P(x)}=\frac{19}{27}x^6-\frac{47}{9}x^5+\frac{111}{9}x^4-\frac{238}{27}x^3-x^2+x+1$$

Đây là đa thức cần tìm.

Tài liệu tham khảo

[1]. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội,1996.
[2]. Phan Đức Chính, Bất đẳng thức, NXB Giáo dục, 1995.
[3]. Nguyễn Văn Mậu, Các bài toán nội suy và áp dụng, NXB Giáo dục, 2007.
[4]. Nguyễn Văn Mậu, Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ, NXB Giáo dục, 2005.
[5]. Nguyễn Thủy Thanh, Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
[6]. Nguyễn Thủy Thanh, Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.
[7]. A.O. Gel~fond, Isqislenie koneqnyh raznoste$i , Moskva, Nauka, 1967.

HERMITE INTERPOLATION BY TOOLS OF COMPLEX ANALYSIS

Abstract:

The article presents the method for constructing the Hertmite interpolation formula, which uses the tool of complex calculus instead of the tool of linear algebra. At the end of this article is an example of the advantages of this method.

Keywords: *Hermite, interpolation, polynomial interpolation.*