ISSN 2354-0575

# ĐA TẠP ỔN ĐỊNH ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NỬA TUYẾN TÍNH TRÊN NỬA TRỤC

**Trịnh Xuân Yến***
*Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Hưng Yên*
** Tác giả liên hệ: trinhyenspkt@gmail.com*

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 02/03/2021
Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 06/05/2021
Ngày bài báo được duyệt đăng: 16/06/2021

**Tóm tắt:**
*Trong bài báo này tôi chứng minh sự tồn tại của đa tạp ổn định đối với nghiệm của phương trình vi phân nửa tuyến tính có dạng*

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+r(x(t))$$

*dưới điều kiện rằng toán tử $A$ sinh ra nửa nhóm các toán tử tuyến tính liên tục mạnh $(e^{tA})_{t\geq 0}$ có nhị phân mũ và số hạng phi tuyến r là liên tục Lipshitz (tức là $\|r(x)-r(y)\|\leq L\|x-y\|$). Các kết quả chính dựa trên phương pháp sử dụng các đánh giá nhị phân trong không gian Banach tương ứng.*
**Từ khóa:** *Không gian Banach, nửa nhóm các toán tử tuyến tính liên tục mạnh, nhị phân mũ, đa tạp ổn định.*

## 1. Đặt vấn đề

Trong thực tế có rất nhiều bài toán Vật lý, Cơ học, Sinh học… dẫn đến việc giải các phương trình hàm có chứa vi phân của hàm phải tìm. Để minh họa ta xét một số ví dụ sau:

- Xét dao động của một chất điểm có khối lượng m dưới tác dụng của lực hút được mô tả bởi phương trình

$$m.l.\phi''(t)+m.g.\sin\phi(t)=0$$

trong đó l là chiều dài của con lắc, $\phi(t)$ là góc lệch của con lắc so với vị trí cân bằng tại thời điểm t.

- Định luật Malthus về quần thể ứng với phương trình

$$\frac{dN(t)}{dt}=(B-D)N(t) \qquad \forall t\geq 0$$

trong đó $N(t)$ là số lượng quần thể tại thời điểm t, B là tỷ lệ sinh, D là tỷ lệ chết tự nhiên.

- Mô hình của quần thể săn-mồi (mô hình Volterra)

$$\begin{cases} x'(t)=\alpha x(t)-\beta x(t)y(t) \\ y'(t)=k\beta x(t)y(t)-my(t) \end{cases}$$

trong đó x(t), y(t) tương ứng là con mồi và vật săn tại thời điểm t, $\alpha$ là tỷ lệ tăng tự nhiên của x(t), m là tỷ lệ chết tự nhiên của vật săn khi không có con mồi, $\beta$ là hệ số tương tác giữa hai loài và 0<k<1.

Trong các mô hình toán học trên ta đều thấy sự tham gia của vi phân các cấp của hàm ẩn $\phi(t), N(t), x(t), y(t)$ trong phương trình mô phỏng các quá trình thực tế. Như vậy bằng cách chọn không gian và toán tử thích hợp, các phương trình đó có thể viết lại dưới dạng phương trình vi phân trừu tượng. Việc xét phương trình dưới dạng trừu tượng trong không gian hàm tổng quát cho phép sử dụng những phương pháp mới dựa trên những bước phát triển gần đây của toán học để tìm hiểu những vấn đề mang tính bản chất của nghiệm phương trình đó.

Trong bài báo này tôi sẽ xét các phương trình vi phân có dạng

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+f(t) \qquad t\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+r(x(t)) \qquad t\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

trong đó f là hàm giới nội trên $\mathbb{R}$, f(0)=0, Df(0)=A và r là liên tục Lipshitz.

Khi phần tuyến tính có nhị phân mũ, ta sẽ tìm điều kiện của số hạng phi tuyến r để xây dựng đa tạp bất biến đối với nghiệm của phương trình (2).

Việc nghiên cứu sự tồn tại của đa tạp bất biến luôn thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học vì nó mang lại bức tranh hình học về dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình vi phân với nhiễu phi tuyến. Mặt khác, nhờ tính hút của đa tạp bất biến, ta có thể sử dụng nguyên lý thu gọn để đưa việc nghiên cứu phương trình vi phân ban đầu về các phương trình đơn giản hơn trên đa tạp này, từ đó nghiên cứu dáng điệu tiệm cận khi thời gian đủ lớn.

Các kết quả ban đầu thu được bởi Hadamard [4], Perron [5,6], Bogoliubov và Mitropolsky [1,2] về sự tồn tại của đa tạp bất biến trong $\mathbb{R}^n$. Sau đó, Daleckii và Krein [3] đã chứng minh sự tồn tại của đa tạp bất biến trong không gian Banach.

Như ta đã biết phương trình thuần nhất thường mô tả hệ thống, còn f đặc trưng cho ngoại lực, thường được gọi là số hạng cưỡng chế. Phương trình thuần nhất trước đó đã đạt được một số kết quả nhất định bởi các nhà toán học trong cả hai trường hợp toán tử A là giới nội và không giới nội. Khó khăn thứ nhất gặp phải khi nghiên cứu tính bị chặn và tồn tại nghiệm của (1) là cần tìm điều kiện của A để với mỗi f thuộc vào không gian Banach tương ứng phương trình (1) có nghiệm bị chặn. Khó khăn thứ hai là cần tìm điều kiện của số hạng phi tuyến r để xây dựng được đa tạp bất biến đối với nghiệm của phương trình (2). Vượt qua các khó khăn này bằng cách sử dụng những thành tựu của toán học hiện đại, ta sẽ xét (1) trong trường hợp toán tử A sinh ra nửa nhóm có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân P để thiết lập sự tồn tại nghiệm và tính bị chặn của nghiệm của phương trình (1), tiếp theo ta đặt điều kiện liên tục Lipshitz cho số hạng phi tuyến r với hằng số Lipshitz đủ nhỏ (tức là $\| r(x)-r(y)\| \leq L\| x-y\|$ ). Các kết quả chính nằm ở Định lý 3.1 và Định lý 3.2.

## 2. Kiến thức cơ bản

Trước tiên ta nhắc lại các khái niệm và kết quả cơ bản về nửa nhóm các toán tử tuyến tính liên tục mạnh và nhị phân mũ.

**Định nghĩa 2.1** (Xem [7]). Nửa nhóm các toán tử tuyến tính liên tục mạnh $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là có nhị phân mũ (Hypecbolic) khi và chỉ khi $X = X_0 \oplus X_1$. Các không gian $X_0$ và $X_1$ là các không gian Banach sao cho nó bất biến với $e^{tA}$ $\forall t$ và thỏa mãn

(i) $\left(e^{tA}|_{X_0}\right)_{t\geq 0}$ là ổn định mũ

(ii) $\left(e^{tA}|_{X_1}\right)_{t\geq 0}$ là khả nghịch và nghịch đảo của nó là ổn định mũ.

**Định nghĩa 2.2** (Xem [7]). Nửa nhóm $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ được gọi là thỏa mãn Định lý Ánh xạ phổ nếu $\sigma(e^{tA})\setminus\{0\} = e^{t\sigma(A)} \quad t\geq 0$.

**Định lý 2.3** (Xem [7]). *Nếu nửa nhóm* $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ *thỏa mãn Định lý Ánh xạ phổ thì ta có* $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ *có nhị phân mũ khi và chỉ khi* $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}=\varnothing$.

*Trong trường hợp nửa nhóm có nhị phân mũ khi đó có một phép chiếu* $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sao cho nó giao hoán với A và thỏa mãn*

$$\sigma(A|_{\operatorname{Im}P}) = \sigma(A)\cap\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z<0\}$$
$$\sigma(A|_{\operatorname{Ker}P}) = \sigma(A)\cap\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$$

*Hơn nữa tồn tại các hằng số dương* $K,\alpha$ *sao cho*

$$\| e^{tA}Px\| \leq Ke^{-\alpha t}\| Px\| \quad \forall t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$\| e^{tA}(I-P)x\| \leq Ke^{\alpha t}\| (I-P)x\| \forall t\leq 0, x\in\mathbb{R}^n \tag{4}$$

**Định nghĩa 2.4.** Với $\eta\in\mathbb{R}$ ta định nghĩa các không gian định chuẩn sau đây

$$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) = \{g\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) | \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|g(t)\|<\infty\};$$
$$\|g\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|g(t)\|$$
$$BC(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^n) = \{g\in C(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^n) | \sup_{t\in\mathbb{R}_-}\|g(t)\|<\infty\};$$
$$\|g\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_-}\|g(t)\|$$
$$BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) = \{g\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) | \sup_{t\in\mathbb{R}_+}e^{-\eta t}\|g(t)\|<\infty\};$$
$$\|g\|_\eta = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}e^{-\eta t}\|g(t)\|$$
$$BC(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^n) = \{g\in C(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^n) | \sup_{t\in\mathbb{R}_-}e^{-\eta t}\|g(t)\|<\infty\};$$
$$\|g\|_\eta = \sup_{t\in\mathbb{R}_-}e^{-\eta t}\|g(t)\|$$

Có thể dễ dàng kiểm tra được các không gian trên là các không gian đầy đủ, hay nói cách khác là các không gian Banach.

## 3. Kết quả chính

### 3.1. Đa tạp ổn định

Trước tiên ta xét sự tồn tại nghiệm giới nội của phương trình

$$\frac{dx}{dt}=\text{Ax(t)+f(t)} \qquad t\in\mathbb{R} \tag{5}$$

trong đó f là hàm liên tục giới nội trên $\mathbb{R}$, f(0)=0, Df(0)=A, toán tử A sinh ra nửa nhóm các toán tử tuyến tính liên tục mạnh có nhị phân mũ.

**Định lý 3.1.** *Giả sử* $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ *có nhị phân mũ với phép chiếu P, các khẳng định sau là đúng*

*(i) Với* $f \in BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ *thì phương trình (5) có ít nhất một nghiệm giới nội trên nửa trục* $\mathbb{R}_+$ *cho bởi công thức*

$$x_+(t) = \int_0^t e^{(t-\xi)A}Pf(\xi)d\xi - \int_t^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

*và với mỗi nghiệm* $y(t), t \in \mathbb{R}_+$ *giới nội trên nửa trục* $\mathbb{R}_+$ *đều có dạng*

$$y(t) = e^{tA}y_0 + x_+(t); \quad y_0 \in \operatorname{Im} P, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

(ii) *Với* $f \in BC(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^n)$ *thì phương trình (5) có ít nhất một nghiệm giới nội trên nửa trục* $\mathbb{R}_-$ *cho bởi công thức*

$$x_-(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\xi)A}Pf(\xi)d\xi - \int_t^0 e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi$$

$\forall t \in \mathbb{R}_-$

*và với mỗi nghiệm* $y(t), t \in \mathbb{R}_-$ *giới nội trên nửa trục* $\mathbb{R}_-$ *đều có dạng*

$$y(t) = e^{tA}y_0 + x_-(t); \quad y_0 \in \operatorname{Ker} P, \forall t \in \mathbb{R}_-.$$

*Chứng minh*: Ta sẽ chứng minh khẳng định thứ nhất, khẳng định thứ hai được chứng minh tương tự. Sử dụng các đánh giá (3) và (4) ta có

$$\begin{aligned}
\| x_+(t) \| &= \| \int_0^t e^{(t-\xi)A}Pf(\xi)d\xi - \int_t^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi \| \\
&\leq \int_0^t \| e^{(t-\xi)A}Pf(\xi) \| d\xi + \\
&\quad \int_t^\infty \| e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi) \| d\xi \\
&\leq K\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} \| Pf(\xi) \| d\xi + \\
&\quad K\int_t^\infty e^{\alpha(t-\xi)} \| (I-P)f(\xi) \| d\xi
\end{aligned}$$

Đặt $H = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|P(t)\|$ ta có

$$\begin{aligned}
\| x_+(t) \| &\leq K(1+H) \| f \| \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}d\xi + \int_t^\infty e^{\alpha(t-\xi)}d\xi\right) \\
&\leq K(1+H) \| f \| \frac{2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra tính giới nội của $x_+(t)$. Đối với bài toán Cauchy tương ứng của (5)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathrm{Ax} \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

thì theo công thức biến thiên hằng số nghiệm của (5) phải có dạng

$$x(t) = e^{(t-s)A}x(s) + \int_s^t e^{(t-\xi)A}f(\xi)d\xi.$$

Ta có,

$$\begin{aligned}
e^{(t-s)A}x_+(s) &= -\int_s^\infty e^{(t-s)A}e^{(s-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi \\
&= -\int_s^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi \\
&= -\int_s^t e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi \\
&\quad -\int_t^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{(t-s)A}x_+(s) &= -\int_s^t e^{(t-\xi)A}f(\xi)d\xi + \int_s^t e^{(t-\xi)A}Pf(\xi)d\xi \\
&\quad -\int_t^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$x_+(t) = e^{(t-s)A}x_+(s) + \int_s^t e^{(t-\xi)A}f(\xi)d\xi.$$

Nói cách khác $x_+(t)$ là một nghiệm của (5).

Tiếp theo ta dùng nguyên lý chồng chất nghiệm suy ra $y(t) - x_+(t) = z(t)$ là nghiệm giới nội của phương trình thuần nhất tương ứng. Vậy thì z(t) phải có dạng

$$z(t) = e^{tA}(Pz(0) + (I-P)z(0)).$$

Nếu $(I-P)z(0) \neq 0$ thì nghiệm z(t) không thể giới nội được. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng kết quả của Định lý 3.1 trên ta có thể xây dựng toán tử tuyến tính giới nội trong không gian có trọng, điều này có ý nghĩa quan trọng trong việc chứng minh sự tồn tại của đa tạp tích phân bất biến đối với nghiệm của phương trình vi phân nửa tuyến tính. Cụ thể ta có định lý sau.

**Định lý 3.2.** *Dưới các giả thiết của Định lý 3.1 các khẳng định sau là đúng*

(i) *Với mỗi* $\eta \in (-\alpha, \alpha)$ *xác định duy nhất một toán tử tuyến tính giới nội* $K_S{:}BC^\eta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) \to BC^\eta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ *cho bởi*

$$(K_S f)(t) = \int_0^t e^{(t-\xi)A}Pf(\xi)d\xi - \int_t^\infty e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi$$

*là nghiệm duy nhất của phương trình (5) với điều kiện* $P((K_S f)(0)) = 0$.

(ii) *Với mỗi* $\eta \in (-\alpha, \alpha)$ *xác định duy nhất một toán tử tuyến tính giới nội* $K_U: BC^{\eta}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^n) \to BC^{\eta}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^n)$ *cho bởi*

$$(K_U f)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-\xi)A} Pf(\xi)d\xi - \int_{t}^{0} e^{(t-\xi)A}(I-P)f(\xi)d\xi$$

*là nghiệm duy nhất của phương trình (5) với điều kiện* $(I-P)((K_U f)(0)) = 0$.

*Chứng minh*: Ta tiếp tục chứng minh khẳng định thứ nhất, khẳng định thứ hai được chứng minh tương tự. Ta có

$$\begin{aligned}
\| (K_S f)(t) \| &\le \int_0^t \| e^{-\eta t} e^{(t-\xi)A} Pf(\xi) \| d\xi + \\
&\quad \int_t^{\infty} \| e^{-\eta t} e^{(t-\xi)A} (I-P) f(\xi) \| d\xi \\
&\le \int_0^t \| e^{-\eta(t-\xi)} e^{-\xi} e^{(t-\xi)A} Pf(\xi) \| d\xi + \\
&\quad \int_t^{\infty} \| e^{-\eta(t-\xi)} e^{-\xi} e^{-\eta t} e^{(t-\xi)A} (I-P) f(\xi) \| d\xi \\
&\le K(1+H) \| f \|_{\eta} \left( \int_0^t e^{(-\alpha-\eta)(t-\xi)} d\xi + \right. \\
&\quad \left. \int_t^{\infty} e^{(\alpha-\eta)(t-\xi)} d\xi \right) \\
&\le K(1+H) \| f \|_{\eta} \left( \frac{1}{\alpha+\eta} - \frac{1}{\alpha-\eta} \right)
\end{aligned}$$

Suy ra $K_S$ là toán tử tuyến tính giới nội và

$$\| K_S \|_{\eta} \le K(1+H) \left( \frac{1}{\alpha+\eta} - \frac{1}{\alpha-\eta} \right). \qquad \square$$

Tiếp theo ta xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{Ax(t)+r(x(t))} \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R} \qquad (6)$$

Giả sử r thỏa mãn điều kiện

$$\| r(x) - r(y) \| \le L \| x - y \| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$Lip(r) = \inf\{L\} < \varepsilon$$

Xét các toán tử

$$R: BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$
$$\omega \mapsto R(\omega)(t) = r\omega(t)$$

và

$$G: BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \operatorname{Im} P \to BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

xác định bởi

$$G(\omega, \phi)(t) = e^{tA}\phi + K_S(R(\omega))(t)$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \omega \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \phi \in \operatorname{Im} P$.

**Định lý 3.3.** *Với các giả thiết trên, nếu* $\varepsilon$ *đủ bé, với mỗi* $\phi \in \operatorname{Im} P$ *tồn tại duy nhất*

$$\omega_{\phi} \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \ \textit{sao cho} \ G(\omega_{\phi}, \phi) = \omega_{\phi}.$$

*Hơn nữa* $\omega_{\phi}$ *liên tục Lipschitz theo* $\phi$.

*Chứng minh*: Một trong những cách thông dụng để chứng minh tính duy nhất nghiệm ta chỉ cần chứng minh ánh xạ co đối với toán tử $G(.,\phi)$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \| G(v,\phi)(t) - G(\omega,\phi)(t) \| \\
&\le \| K_S \| \| R(v) - R(\omega) \| \\
&\le \frac{2K(1+H)}{\alpha} \varepsilon \| v - \omega \| \ \forall v, \omega \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Do đó nếu $q = \dfrac{2K(1+H)}{\alpha}\varepsilon < 1$ thì $G(.,\phi)$ là ánh xạ co trong $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Theo định lý điểm bất động Banach tồn tại duy nhất $G(\omega_{\phi}, \phi) = \omega_{\phi}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh tính liên tục Lipschitz của $\omega_{\phi}$ theo $\phi$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\| \omega_{\phi} - \omega_{\psi} \| = \| G(\omega_{\phi}, \phi) - G(\omega_{\psi}, \psi) \| \\
&\le \varepsilon \| K_S \| . \| \omega_{\phi} - \omega_{\psi} \| + K \| \phi - \psi \| \\
&\Rightarrow \| \omega_{\phi} - \omega_{\psi} \| \le \frac{K}{1-q} \| \phi - \psi \| \ \forall \phi, \psi \in \operatorname{Im} P.
\end{aligned}$$

Suy ra $\omega_{\phi}$ liên tục Lipschitz theo $\phi$. $\square$

Dựa trên toàn bộ quá trình xây dựng ánh xạ Lipschits liên tục trong không gian Banach và tính duy nhất nghiệm ứng với mỗi giá trị đầu thuộc không gian ảnh, ta đưa ra định nghĩa sau về đa tạp ổn định.

**Định nghĩa 3.4.** Đồ thị ánh xạ

$$S: \operatorname{Im} P \to \operatorname{Ker} P$$
$$\phi \ \mapsto (I-P)(\omega_{\phi}(0))$$

được gọi là đa tạp ổn định của phương trình (6) và được kí hiệu là $\mathrm{W}^S$.

*Nhận xét*: Như vậy đồ thị của S thực chất là đa tạp ổn định $GrapS = \{(\phi, S\phi) \mid \phi \in \operatorname{Im} P\}$. Ta đồng nhất

$$X \times Y \equiv (X, Y) \equiv X \oplus Y$$
$$\Rightarrow (x, y) = x + y.$$

Suy ra đa tạp ổn định thực chất là

$$\mathrm{W}^S = \{\omega_{\phi}(0), \phi \in \operatorname{Im} P\}.$$

**Tài liệu tham khảo**


[1]. J. Hadamard, "Sur l'intération et les solutions asymptotiques des equations différentielles". *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **29**, pp. 224-228, 1901.

[2]. O. Perron, "Uber stabilitat und asymptotisches verhalten der integrale von differentialgleichungssystemen". *Mathematische Zeitschrift*, **29**, pp. 129-160, 1929.

[3]. O. Perron, "Die stabilitatsfrage bei differentialgleichungen". *Mathematische Zeitschrift*, **32**, pp. 703-728, 1930.

[4]. N. Bogoliubov, Yu. Mitropolsky, "The method of integral manifolds in nonlinear mechanics", *Contributions to Differential Equations*, **2**, pp. 123-196, 1963.

[5]. N. Bogoliubov, Yu. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, 1961, Translated from the second revised Russian edition, International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

[6]. J.L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach spaces*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1974.

[7]. T.X. Yến, Luận án Tiến sĩ Toán học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Hà Nội, 2021.


## STABLE MANIFOLDS FOR SEMILINEAR DIFFERENTAL EQUATIONS ON A HALF-LINE


**Abstract:**

*In this paper, I prove the existence of stable manifolds for solutions of semilinear differential equations of the form*

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + r(x(t))$$

*under the conditions that the operator A generates the strongly continuous operators semigruops having an exponential dichotomy and the r nonlinear operator is Lipschitz continuous (i.e.* $\| r(x) - r(y) \| \le L \| x - y \|$*). The main results are based on the method using dichotomy evaluations in the corresponding Banach space.*



***Keywords:*** *Banach space, strongly continuous operators semigruops, exponential dichotomy, stable manifolds.*