ISSN 2354-0575

PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ PHẢN GIAO HOÁN VỚI ĐỐI HỢP

Trịnh Xuân Yến - Nguyễn Thị Hạnh
Bộ môn Toán – khoa Khoa Học Cơ Bản- Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Hưng Yên

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 23- 11 - 2019
Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 14- 12 - 2019
Ngày bài báo được duyệt đăng: 22- 12 - 2019

Tóm tắt:

Trong bài báo này chúng tôi sẽ trình bày cách giải phương trình với một toán tử D, nó không giao hoán với một toán tử đối hợp S cấp N nhưng thỏa mãn quan hệ

$$SD = \varepsilon DS, \text{ ở đây } \varepsilon = e^{2\pi i/N}.$$

D được gọi là một toán tử chuyển vị nếu N=2, khi đó ta có $SD + DS = 0$ *và ta nói D là phản giao hoán với S.*

Từ khóa: *Toán tử đại số, phương trình hàm với đối số biến đổi.*

1. Đặt vấn đề

Lý thuyết toán tử được xây dựng và phát triển mạnh mẽ trong những năm đầu thế kỷ 20. Các kết quả gắn với tên tuổi nhiều nhà toán học nổi tiếng như A Pazy, T.Kato, D. Przeworska, Rolewicz,... Cùng song hành và tiếp ngay sau đó là sự ra đời của hàng loạt các lý thuyết toán tử trong không gian tuyến tính tổng quát gắn với lý thuyết các phương trình hàm. Trong [7] D.Przeworska và Rolewicz đã trình bày cách sử dụng toán tử đại số trong phương trình vi tích phân. Trong [4] T. Kato đã sử dụng các toán tử xây dựng lý thuyết nhiễu để giải các phương trình vi phân phi tuyến, nửa tuyến tính trong không gian Banach. Trong [6] A. Pazy đã sử dụng toán tử xây dựng hoàn thiện lý thuyết nửa nhóm và ứng dụng vào giải phương trình đạo hàm riêng.

Tại Việt Nam, từ cuối thế kỷ 20 đã có nhiều nhà khoa học quan tâm đến lĩnh vực này, một số ấn phẩm khoa học tiêu biểu rất hữu ích trong việc học tập, nghiên cứu về toán tử-phương trình hàm có thể kể đến [1,2,3,5]. Nếu như trong [3] tác giả đã xây dựng một hệ thống lý thuyết chặt chẽ, tuần tự, tổng quát liên quan đến toán tử và không gian tuyến tính thì trong [5] tác giả lại tập trung xây dựng khai thác các tính chất và ứng dụng của các phần tử đại số, toán tử đối hợp, toán tử chuyển vị để giải các bài toán về phương trình hàm.

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng một số tính chất cơ bản của toán tử đại số và toán tử đối hợp để giải một số dạng phương trình toán tử đặc biệt.

2. Phương trình toán tử phản giao hoán với đối hợp

Định nghĩa 2.1: ([4]) Cho X là một không gian tuyến tính (trên trường số phức). Một toán tử đại số S là đối hợp cấp N $(N \geq 2)$ nếu đa thức đặc trưng của nó có dạng $P(t) = t^N - 1$, tức là nếu $S^N = I$ trên X. Trong trường hợp N=2, S được gọi đơn giản là đối hợp.

Giả sử S là một đối hợp cấp N trên không gian X. Các nghiệm đặc trưng của toán tử S là các căn bậc N của đơn vị:

$$\varepsilon = e^{2\pi i/N}, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{N-1}, \varepsilon^N = 1.$$

Giả sử S là một đối hợp trên X, tức là $S^2 = I$. Cho

$$P^+ = \frac{1}{2}(I+S), P^- = \frac{1}{2}(I-S).$$

Các toán tử P^+ và P^- là các phép chiếu rời nhau cho một phân hoạch của đơn vị:

$$P^+P^- = P^-P^+ = 0, (P^+)^2 = P^+, (P^-)^2 = P^-, P^+ + P^- = I$$

Các giá trị riêng của toán tử S là 1 và -1 và các không gian riêng tương ứng là $X^+ = P^+X$ và $X^- = P^-X$, tức là, nếu ta viết $x^+ = P^+x, x^- = P^-x$ đối với bất kỳ $x \in X$, ta có

$$Sx^+ = x^+, Sx^- = x^- .$$

Không gian X là tổng trực tiếp của các không gian X^+ và X^-. Đối với toán tử đối hợp S trong không gian X, giả sử D là một toán tử tuyến tính tác động trong X và phản giao hoán với S. Khi đó toán tử D^2 là giao hoán với S.

Tính chất 2.2: *([4]) Nếu* $S^2 = I$ *và* $SD + DS = 0$ *trên một không gian tuyến tính X, thì* $P^+D = DP^-, P^-D = DP^+$.

Chứng minh: Thật vậy, do $SD = -DS$, ta có

$$P^+D = \frac{1}{2}(I+S)D = \frac{1}{2}(D+SD) = \frac{1}{2}(D-DS) = \frac{1}{2}D(I-S) = DP^-,$$

$$P^-D = \frac{1}{2}(I-S)D = \frac{1}{2}(D-SD) = \frac{1}{2}(D+SD) = \frac{1}{2}D(I+S) = DP^+$$

. □

Từ tính chất trên suy ra rằng

$$Dx^+ = (Dx)^- \in X^-, Dx^- = (Dx)^+ \in X^+.$$

Thật vậy,

$$Dx^+ = DP^+x = P^-Dx = (Dx)^-,$$

$$Dx^- = DP^-x = P^+Dx = (Dx)^+$$

Các tính chất đặc biệt của toán tử phản giao hoán là phân biệt với lớp các toán tử chuyển vị. Giả sử trong không gian tuyến tính X ta có toán tử $A = (a_0 I + b_0 S) + (a_1 I + b_1 S)D$, ở đây S là một đối hợp trong X, D là một toán tử tuyến tính trong X và phản giao hoán với S và a_0, b_0, a_1, b_1 là các vô hướng. Để giải phương trình $Ax = y, y \in X$, trong bài báo này chúng tôi sẽ xét một số trường hợp đặc biệt. Cụ thể, ta sẽ giả sử $a_0^2 - b_0^2 \neq 0; a_1^2 - b_1^2 \neq 0$ và D không là một đối hợp.

Mệnh đề 2.3: ([4])

Cho

$B = (a_0 I - b_0 S) - (a_1 I + b_1 S)D;$

$R_A = -(a_1^2 - b_1^2)^{-1} B$

Khi đó

$$AR_A = R_A A = D^2 - \lambda I, \tag{1}$$

Trong đó,

$$\lambda = \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_1^2 - b_1^2} \neq 0. \tag{2}$$

Mệnh đề 2.4: ([4]) $Z_A \subset Z_{D^2-\lambda I}$ *(tương tự,* $Z_{R_A} \subset Z_{D^2-\lambda I}$*).*

Định lý 2.5: ([4]) *Ta có*

$$Z_{D^2-\lambda I} = \left\{ z \in X : z = z_1 + Sz_2, z_1, z_2 \in Z_{D-\sqrt{\lambda} I} \right\}.$$

Chứng minh: Giả sử rằng $z = z_1 + Sz_2$, trong đó $z_1, z_2 \in Z_{D-\sqrt{\lambda} I}$.

Khi đó,

$$(D^2 - \lambda I)z = (D^2 - \lambda I)z_1 + (D^2 - \lambda I)Sz_2$$
$$= (D^2 - \lambda I)z_1 + S(D^2 - \lambda I)z_2$$
$$= (D + \sqrt{\lambda} I)(D - \sqrt{\lambda} I)z_1 + S(D + \sqrt{\lambda} I)(D - \sqrt{\lambda} I)z_2$$
$$= 0$$

vì $D^2 S = SD^2$. Vậy nên $z \in Z_{D^2-\lambda I}$.

Ngược lại, giả sử rằng $z \in Z_{D^2-\lambda I}$. Toán tử $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}D$ là một đối hợp trên không gian $Z_{D^2-\lambda I}$. Thật vậy, do $\lambda \neq 0$, ta có đối với bất kỳ $z \in Z_{D^2-\lambda I}$,ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}D\right)^2 z - z = 0,$$

tức là $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}D\right)^2 = I$ trên $Z_{D^2-\lambda I}$.

Điều này dẫn đến sự phân tích thành tổng trực tiếp của $Z_{D^2-\lambda I}$.

$$Z_{D^2-\lambda I} = Z_{D-\sqrt{\lambda} I} \oplus Z_{D+\sqrt{\lambda} I}.$$

Vậy nên $z = z_1 + z_2'$, trong đó $z_1 \in Z_{D-\sqrt{\lambda} I}, z_2' \in Z_{D+\sqrt{\lambda} I}$ là độc lập tuyến tính. Ta có thể chỉ ra rằng $z_2' = Sz_2$, trong đó $z_2 \in Z_{D+\sqrt{\lambda} I}$. Do $z_2' \in Z_{D+\sqrt{\lambda} I}$, ta có $Dz_2' = -\sqrt{\lambda} z_2'$.

Vậy nên,

$$\sqrt{\lambda} S z_2' = S\left(\sqrt{\lambda} z_2'\right) = -SDz_2' = DSz_2',$$

điều này suy ra $(D - \sqrt{\lambda} I)Sz_2' = 0$ và $z_2 = Sz_2' \in Z_{D-\sqrt{\lambda} I}$. Nhưng $z_2' = S^2 z_2' = S(Sz_2') = Sz_2$, suy ra điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 2.6: ([4]) *Nếu* x^* *là nghiệm của phương trình* $(D^2 - \lambda I)x^* = y$, *thì* $x = R_A x^*$ *là nghiệm của phương trình* $Ax = y$.

Định lý 2.7:([4]) Ta có

$$Z_A = \left\{ z \in X : z = \left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I - \left(b_0 + b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1 \right\}$$

và

$$Z_{R_A} = \left\{ z \in X : z = \left[\left(a_0 + a_1\sqrt{\lambda} \right) I + \left(b_0 + b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1 \right\}$$

trong đó $z_1 \in Z_{D-\sqrt{\lambda}I}$.

Cuối cùng, ta thu được định lý sau kết nối với dạng tổng quát của nghiệm của phương trình Ax=y và $R_A u = y$.

Định lý 2.8:

Xét toán tử $A = (a_0 I + b_0 S) + (a_1 I + b_1 S)\mathrm{D}$, *trong đó* $S^2 = I$ *và SD+DS=0 trên không gian tuyến tính X và hơn nữa D không là một đối hợp và* $a_0^{\ 2} - b_0^{\ 2} \neq 0 \neq a_1^{\ 2} - b_1^{\ 2}$.

Giả sử x^* *là một nghiệm của phương trình* $(D^2 - \lambda I)x^* = y, y \in X$. *Khi đó mọi nghiệm của phương trình Ax=y là có dạng* $x = R_A x^* + \left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I - \left(b_0 - b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1$, *trong đó* z_1 *là một nghiệm của phương trình* $(D - \sqrt{\lambda} I)z_1 = 0$, *đồng thời nghiệm của phương trình* $R_A u = y$ *là có dạng*

$$u = \mathrm{A}x + \left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I + \left(b_0 - b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1 .$$

Trong đó: λ và R_A là được xác định như trong (1) và (2).

Chứng minh: Ta xét

$$Ax = A\left[R_A x^* + \left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I - \left(b_0 - b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1 \ \right]$$

$$Ax = \mathrm{A}R_A x^* + A\left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I - \left(b_0 - b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1$$

Do đó, theo Mệnh đề 2.6 và Định lý 2.7 ta suy ra được $Ax = y$. Tương tự ta cũng có được kết quả nghiệm của phương trình $R_A u = y$ là có dạng

$$u = \mathrm{A}x + \left[\left(a_0 - a_1\sqrt{\lambda} \right) I + \left(b_0 - b_1\sqrt{\lambda} \right) S \right] z_1 .$$

3. Kết luận:

Trong bài báo này chúng tôi đã sử dụng tính chất của toán tử đối hợp S và toán tử chuyển vị D không là đối hợp để áp dụng giải phương trình hàm với toán tử được xây dựng bởi

$$A = (a_0 I + b_0 S) + (a_1 I + b_1 S)\mathrm{D},$$

trong đó các hằng số thỏa mãn một số điều kiện rằng buộc cụ thể.

Tài liệu tham khảo

[1]. P.K. Anh, T.Đ.Long. *Giáo trình Hàm thực và Giải tích hàm*. NXB ĐHQG HÀ NỘI, 2001.

[2] N.V. Mau. *Lý thuyết toán tử và phương trình tích phân kỳ dị* , NXB ĐHQG HÀ NỘI, 2006.

[3]. H. Tụy. *Giáo trình Hàm thực và Giải tích hàm*. NXB ĐHQG HÀ NỘI , 2002.

Publishers, Hanoi, 2005.

[4] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1976.

[5] N.V. Mau. *Algebraic Elements and Boundary Value Problems*. Vietnam Nation University

[6] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators anh Application to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.

[7] D.Przeworska, Rolewicz. *Algebraic Analysis*. PWN-Polish Scientific Publishers, D.Reidel Publ. Co, 1988.

THE EQUATION OF NON-COMMUTATIVE OPERATOR WITH INVOLUTION OPERATOR

Abstract:

In this paper we will show how to solve an equation with a D operator, which is non-commutative with a involution operator S order N but satisfies the relationship

$$SD = \varepsilon DS, \ \textit{where} \ \varepsilon = e^{2\pi i/N} .$$

D is called a transpose operator if N = 2, then we have SD+DS=0 and we say D is non-commutative with S.

Keywords: *Algebra operators, the function equation of variable arguments.*