



# ỨNG DỤNG TOOLBOX TRONG MATLAB XÂY DỰNG VÀ MÔ PHỎNG MÔ HÌNH TOÁN HỌC CÁNH TAY ROBOT CÔNG NGHIỆP

Đào Minh Tuấn, Nguyễn Thị Thúy, Nguyễn Thị Như  
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên

Ngày nhận: 05/4/2016  
Ngày sửa chữa: 08/6/2016  
Ngày xét duyệt: 20/6/2016

## Tóm tắt:

Để thiết kế và điều khiển cánh tay robot, bài toán động học và động lực học rất quan trọng. Động học robot nghiên cứu chuyển động các khâu của robot về phương diện hình học, nhằm phục vụ tính toán và thiết kế cánh tay robot. Động lực học nghiên cứu các lực và moment gây ra chuyển động, nhằm phục vụ điều khiển cánh tay robot. Tuy nhiên, việc tính toán các tham số động học và động lực học của robot bằng tay phức tạp, gặp rất nhiều khó khăn và dễ gây nhầm lẫn. Bài báo này đề cập đến ứng dụng Toolbox trong Matlab để giải quyết hai bài toán một cách dễ dàng, chính xác.

**Từ khóa:** Động học cánh tay robot, Động lực học cánh tay robot, Thiết kế cánh tay robot.

## 1. Đặt vấn đề

Bài toán động học robot để nghiên cứu chuyển động các khâu của robot về phương diện hình học nhằm phục vụ tính toán và thiết kế cánh tay robot. Nhiệm vụ chính của bài toán động học thuận là xác định vị trí và hướng của bàn kẹp dưới dạng hàm của các biến khớp. Các phương pháp ma trận 4x4 hay được sử dụng trong phân tích động học robot. Trong bài báo này trình bày phương pháp ma trận Denavit-Hartenberg xác định vị trí, vận tốc của bàn kẹp cánh tay robot [1].

Bài toán động lực học để nghiên cứu các lực và moment gây ra chuyển động nhằm phục vụ điều khiển cánh tay robot. Nhiệm vụ chính của bài toán động lực học là xây dựng mô hình toán học của cánh tay robot. Trong bài báo này trình bày phương pháp Lagrange xây dựng mô hình toán học cánh tay robot [1].

Trong thực tế cho thấy việc thực hiện hai bài toán này bằng tay rất phức tạp, gặp nhiều khó khăn và dễ gây nhầm lẫn. Bài báo đưa ra ứng dụng Toolbox trong Matlab để giải hai bài toán động học thuận và động lực học nhằm mô phỏng và xây dựng mô hình toán học một cách dễ dàng và chính xác.

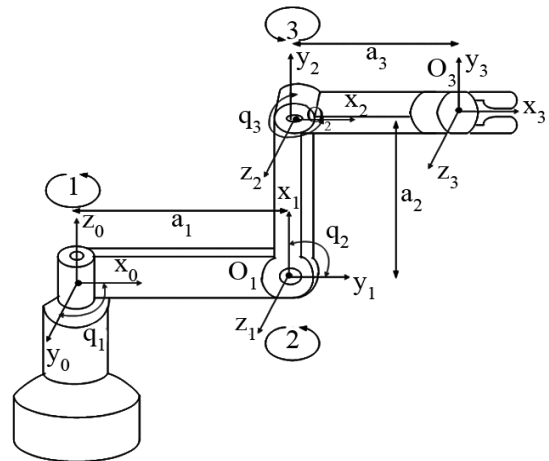
## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Mô hình robot RRR

Chuyển động của robot gồm 3 khớp.

- Khớp 1: Chuyển động quay quanh trục  $z_0$ .
  - Khớp 2: Chuyển động quay quanh trục  $z_1$ .
  - Khớp 3: Chuyển động quay quanh trục  $z_2$ .
- $q_1, q_2, q_3$  là các góc quay của khớp 1, khớp 2 và khớp 3.

$a_1, a_2, a_3$  là độ dài của các thanh nối 1, thanh nối 2 và thanh nối 3.



Hình 1. Cánh tay robot RRR

### 2.2. Giải bài toán động học thuận và mô phỏng cánh tay robot

#### 2.2.1. Thiết lập hệ phương trình động học

##### 2.2.1.1. Lập bảng thông số DH[1]

Bảng 1.1. Bảng tham số động học của cánh tay robot RRR

Khớp	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	$a_1$	$\pi/2$
2	0	$\theta_2$	$a_2$	0
3	0	$\theta_3$	$a_3$	0

Với:

- $d_i$ : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục  $z_{i-1}$  để góc tọa độ  $O_{i-1}$  chuyển đến  $O'_i$ , giao điểm của trục  $x_i$  và trục  $z_{i-1}$ .
- $a_i$ : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục  $x_i$  để điểm  $O'_i$  chuyển đến điểm  $O_i$ .

-  $\alpha_i$ : góc quay quanh trục  $x_i$  sao cho trục  $z'_{i-1}$  ( $z'_{i-1}/z_{i-1}$ ) chuyển đến trục  $z_i$ .  
 -  $\theta_i$ : góc quay quanh trục  $z_{i-1}$  để trục  $x_{i-1}$  chuyển đến trục  $x'_i$  ( $x'_i // x_i$ ).

**2.2.1.2. Xác định các ma trận Ai theo thông số DH [1]**

- Ta có:

$$A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

- Ma trận D-H của khâu 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & a_1 C_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & a_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận D-H của khâu 2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận D-H của khâu 3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bảng 1.2. Bảng ký hiệu

Ký hiệu	Giải thích
$C_i$	$\cos(\theta_i)$
$C_{ij}$	$\cos(\theta_i + \theta_j)$
$S_i$	$\sin(\theta_i)$
$S_{ij}$	$\sin(\theta_i + \theta_j)$

Từ đó suy ra ma trận thuần nhất T:

$$T_3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} N_x & O_x & A_x & P_x \\ N_y & O_y & A_y & P_y \\ N_z & O_z & A_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.2.1.3. Thiết lập các phương trình động học cơ bản [3]**

Các thành phần của ma trận chỉ hướng:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{23}C_1; N_y = C_{23}S_1; N_z = S_{23}; \\ O_x &= -S_{23}C_1; O_y = -S_{23}S_1; O_z = C_{23}; \\ A_x &= S_1; A_y = -C_1; A_z = 0; \end{aligned}$$

Tọa độ điểm thao tác:

$$\begin{aligned} P_x &= C_1(a_1 + a_3 C_{23} + a_2 C_2); \\ P_y &= S_1(a_1 + a_3 C_{23} + a_2 C_2); \\ P_z &= a_3 S_{23} + a_2 S_2 \end{aligned}$$

**2.2.2. Tính toán động học thuận Robot**

**2.2.2.1. Vị trí điểm thao tác cuối E**

$$r_E = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(a_1 + a_3 C_{23} + a_2 C_2) \\ S_1(a_1 + a_3 C_{23} + a_2 C_2) \\ a_3 S_{23} + a_2 S_2 \end{pmatrix}$$

**2.2.2.2. Vận tốc điểm thao tác cuối E**

$$v_E = \dot{r}_E = \begin{pmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{pmatrix}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= -\dot{q}_2 C_1(a_3 S_{23} + a_2 S_2) - \dot{q}_1 S_1(a_1 + a_3 C_{23} + a_2 C_2) \\ &\quad - \dot{q}_3 a_3 S_{23} C_1 \\ \dot{P}_y &= \dot{q}_1 C_1(a_1 + a_3 S_{23} + a_2 C_2) - \dot{q}_2 S_1(a_3 S_{23} + a_2 S_2) \\ &\quad - \dot{q}_3 a_3 S_{23} S_1 \\ \dot{P}_z &= \dot{q}_2(a_3 C_{23} + a_2 C_2) + \dot{q}_3 a_3 C_{23}. \end{aligned}$$

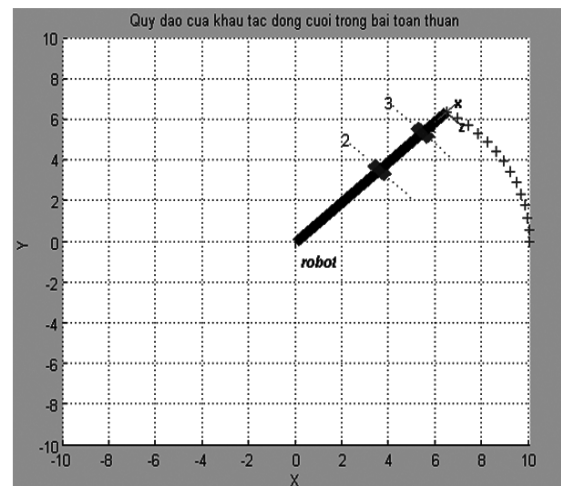
**2.2.3. Mô phỏng cánh tay robot**

Chọn quỹ đạo chuyển động bất kỳ như sau:

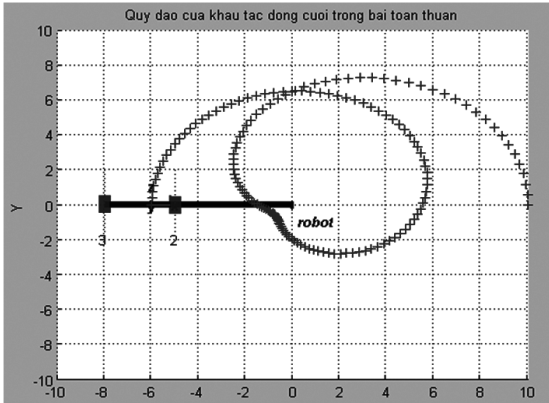
$$q_1 = 3t; q_2 = 2t; q_3 = t;$$

Thay các thông số:  $a_1 = 5; a_2 = 3; a_3 = 2;$

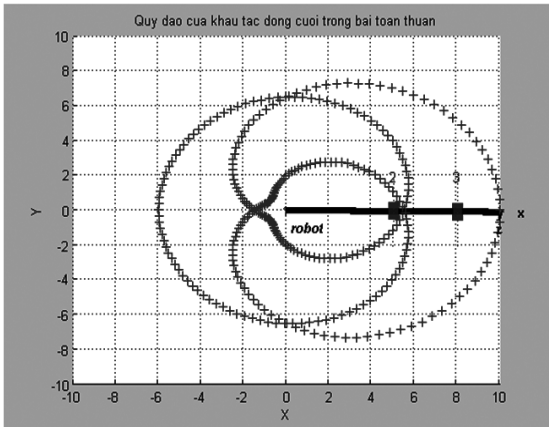
Sử dụng Symbolic Math Toolbox và Robotics Toolbox ta được quỹ đạo của cánh tay robot trong khoảng t như sau:



Hình 2. Quỹ đạo tác động cuối trong bài toán thuận với  $t = 0 - \pi/16$



Hình 3. Quy đạo tác động cuối trong bài toán thuận với  $t = 0 - \pi$



Hình 4. Quy đạo tác động cuối trong bài toán thuận với  $t = 0 - 2\pi$

**2.3. Xây dựng mô hình toán học của robot công nghiệp**

**2.3.1. Tọa độ các điểm trọng tâm của thanh nối trên hệ tọa độ O(x,y,z)**

$$r_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_2 C_1 C_2 + a_1 C_1 \\ \frac{1}{2}a_2 S_1 C_2 + a_1 S_1 \\ \frac{1}{2}a_2 S_2 \end{pmatrix}$$

- Tọa độ trọng tâm thanh nối 3

$$r_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_3 C_1 C_{23} + a_2 C_1 C_2 + a_1 C_1 \\ \frac{1}{2}a_3 S_1 C_{23} + a_2 S_1 C_2 + a_1 S_1 \\ a_2 S_2 + \frac{1}{2}a_3 S_{23} \end{pmatrix}$$

**2.3.2. Vận tốc dài tại các điểm trọng tâm của các thanh nối**

- Vận tốc dài điểm trọng tâm thanh nối 1

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_1 S_1 \dot{q}_1 \\ \frac{1}{2}a_1 C_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vận tốc dài điểm trọng tâm thanh nối 2

$$V_2 = \begin{pmatrix} -a_1 S_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_2 C_2 S_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_2 C_1 S_2 \dot{q}_2 \\ a_1 S_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_2 C_1 C_2 \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_2 S_1 S_2 \dot{q}_2 \\ \frac{1}{2}a_2 C_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

- Vận tốc dài điểm trọng tâm thanh nối 3

$$V_3 = \begin{pmatrix} V_{31} \\ V_{32} \\ V_{33} \end{pmatrix}$$

$$V_{31} = -a_1 S_1 \dot{q}_1 - a_2 S_1 C_2 \dot{q}_1 - a_2 C_1 S_2 \dot{q}_2$$

$$- \frac{1}{2}a_3 S_1 C_{23} \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_3 C_1 S_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$V_{32} = -a_1 C_1 \dot{q}_1 - a_2 C_1 C_2 \dot{q}_1 - a_2 S_1 S_2 \dot{q}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}a_3 C_1 C_{23} \dot{q}_1 - \frac{1}{2}a_3 S_1 S_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$V_{33} = \frac{1}{2}a_3 C_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + a_2 C_2 \dot{q}_2$$

**2.3.3. Vận tốc góc của các khớp**

- Vận tốc góc khớp 1:  $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$

- Vận tốc góc khớp 2:  $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$

- Vận tốc góc khớp 3:  $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$

**2.3.4. Động năng của các khâu**

- Động năng của khâu thứ 1

$$K_1 = \frac{1}{8}(m_1 a_1^2 + 4I_1) \dot{q}_1^2$$

- Động năng của khâu thứ 2

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 a_1 a_2 C_2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{8}a_2^2 C_2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{8}m_2 a_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{q}_2^2$$

- Động năng khâu thứ 3

$$K_3 = \frac{1}{2}I_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}a_1^2 m_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{16}a_3^2 m_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{8}a_3^2 m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{8}a_3^2 m_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{4}a_3^2 m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2}a_2^2 m_3 C^2 q_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{16}a_3^2 m_3 C(2q_2 + 2q_3) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}a_1 a_3 m_3 C_{23} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}a_2 a_3 m_3 C(2q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + a_1 a_2 m_3 C_2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}a_2 a_3 m_3 C_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}a_2 a_3 m_3 C_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}a_2 a_3 m_3 C_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

- Tổng động năng của các khâu

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$= \frac{1}{8}(m_1 a_1^2 + 4I_1) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} a_1^2 m_2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_1^2 m_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{8} a_2^2 m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} a_2^2 m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{16} a_3^2 m_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{8} a_3^2 m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{8} a_3^2 m_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{4} a_2^2 m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{8} a_2^2 m_2 C_2^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 m_3 C_2^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{16} a_3^2 m_3 C(2q_2 + 2q_3) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_1 a_3 m_3 C_{23} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4} a_2 a_3 m_3 C(2q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_1 a_2 m_2 C_2 \dot{q}_1^2 + a_1 a_2 m_3 C_2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4} a_2 a_3 m_3 C_3 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 C_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 C_3 q_2 q_3$$

**2.3.5. Thế năng của các khâu**

- Thế năng của khâu 1:  $P_1 = 0$

- Thế năng của khâu 2

$$P_2 = \frac{1}{2} a_2 g m_2 S_2$$

- Thế năng của khâu 3

$$P_3 = g m_3 \left( a_2 S_2 + \frac{1}{2} a_3 S_{23} \right)$$

- Tổng động năng của các khâu

$$P = \frac{1}{2} g m_3 \left( a_2 S_2 + \frac{1}{2} a_3 S_{23} + a_2 g m_2 S_2 \right)$$

**2.3.6. Tính hàm Lagrange của cánh tay robot RRR**

- Hàm Lagrange:  $L = K - P$  [1]

- Momen đặt lên khớp 1

$$M_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad [1]$$

- Momen đặt lên khớp 2

$$M_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} \quad [1]$$

- Momen đặt lên khớp 3

$$M_3 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} \quad [1]$$

Với:  $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$

Khi đó ta thiết lập phương trình động lực học của cánh tay robot RRR được thiết lập có dạng sau:

$$M = H(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) \quad [1]$$

Thành phần quán tính H

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & H_{23} \\ 0 & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}$$

Trong đó:

$$H_{11} = I_1 + a_1^2 \left( \frac{1}{4} m_1 + m_2 + m_3 \right) + \frac{1}{8} a_3^2 m_3 + a_2^2 \left( \frac{1}{4} m_2 + m_3 \right) C_2^2 + \frac{1}{8} a_3^2 m_3 C(2q_2 + 2q_3) +$$

$$+ a_1 a_3 m_3 C_{23} + \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 C(2q_2 + q_3) + a_1 a_2 (m_2 + 2m_3) C_2 + \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3$$

$$H_{22} = I_2 + a_2^2 \left( \frac{1}{4} m_2 + m_3 \right) + a_2 a_3 m_3 C_3$$

$$H_{23} = \frac{1}{4} a_3^2 m_3; H_{32} = \frac{1}{4} a_3^2 m_3; H_{33} = I_3 + \frac{1}{4} a_3^2 m_3$$

Thành phần tương hỗ V

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Trong đó:

$$V_1 = -a_2^2 \left( \frac{1}{4} m_2 + m_3 \right) S(2q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$- \frac{1}{8} a_3^2 m_3 (2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3) S(2q_2 + 2q_3) \dot{q}_1$$

$$- a_1 a_3 m_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) S_{23} \dot{q}_1$$

$$- \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) S(2q_2 + q_3) \dot{q}_1$$

$$- a_1 a_2 (2m_3 + m_2) \dot{q}_2 S_2 \dot{q}_1$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 S_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_2^2 \left( \frac{1}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) S(2q_2) \dot{q}_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{8} a_3^2 m_3 S(2q_2 + 2q_3) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_1 a_3 m_3 S_{23} \dot{q}_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 S(2q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + a_1 a_2 \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) S_2 \dot{q}_1^2$$

$$V_3 = -\frac{1}{2} a_2 a_3 m_3 S_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{8} a_3^2 m_3 S(2q_2 + 2q_3) \dot{q}_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} a_1 a_3 m_3 S_{23} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4} a_2 a_3 m_3 S(2q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 +$$

$$+ a_2 a_3 m_3 S_3 \left( \frac{1}{4} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right)$$

Thành phần trọng trường G

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g m_2 a_2 C_2 + g m_3 \left( a_2 C_3 + \frac{1}{2} a_3 C_{23} \right) \\ g m_3 \left( a_2 C_3 + \frac{1}{2} a_3 C_{23} \right) \end{pmatrix}$$

**3. Kết luận và đánh giá**

Bài báo trình bày tổng quan về ứng dụng Toolbox trong Matlab để xây dựng mô hình toán học và mô phỏng cánh tay robot. Với kết quả thu được từ ứng dụng trên cánh tay robot RRR nhận thấy quá trình giải hai bài toán một cách dễ dàng, kết quả chính xác. Ưu điểm nổi bật của ứng dụng Toolbox là mô phỏng và xây dựng mô hình toán học cánh tay robot một cách đơn giản, chính xác. Điều này sẽ nâng cao chất lượng trong quá trình thiết kế và điều khiển cánh tay robot.

**Tài liệu tham khảo**

- [1]. Nguyễn Văn Khang, Chu Anh Mỹ, (2011), “*Cơ sở robot công nghiệp*”, NXB GDVN, trang 39 – 58.
- [2]. Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Việt Anh, (2006), “*Lập trình Matlab và ứng dụng*”, NXB KHKT, Hà Nội.
- [3]. Phạm Đăng Phước, (2006), “*Robot công nghiệp*”, NXB KHKT, Hà Nội.
- [4]. Peter Corke, (2011), “*Robotics, Vision and Control Fundamental Algorithms in Matlab*”.

**APPLY TOOLBOX FOR MATLAB TO SIMULATION  
AND MATHEMATICAL MODEL CONSTRUCTION ROBOT ARMS**

**Abstract:**

*To design and control the robot arm, problem kinetics and problem dynamics are important. Kinematic robot research stages of the robot motion in terms of geometry. Kinetics is serving calculation problem and design the robot arm. Research dynamics and torque forces causing motion. Dynamics is the problem of serving robot arm control. However, the calculation of the kinetic parameters and dynamics of complex robotic hand, face many difficult and confusing. This article refers to the Toolbox in Matlab application to solve two problems with ease and accuracy.*

**Keywords:** *Kinematics robot arm, the robot arm dynamics, design robotic arm.*