ISSN 2354-0575

TÍNH TOÁN BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ TRÒN CÓ CẤU TẠO ĐỐI XỨNG HÌNH HỌC, CHỊU TẢI UỐN ĐỐI XỨNG

Nguyễn Minh Tuấn, Hoàng Minh Thuận, Trần Văn Quyết
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Hưng Yên

Ngày nhận: 11/4/2016
Ngày sửa chữa: 10/5/2016
Ngày xét duyệt: 16/6/2016

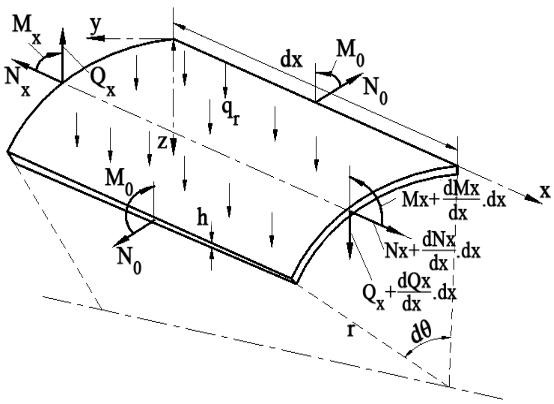
Tóm tắt:
Bài báo trình bày phương pháp tính toán biến dạng của vỏ trụ tròn có cấu tạo đối xứng cả về tải trọng lẫn kết cấu hình học. Trên các phương diện tĩnh học, hình học và vật lý, nghiên cứu đã đưa ra được công thức tổng quát tính biến dạng của vỏ trụ tròn chịu tải uốn đối xứng và áp dụng cho những trường hợp thường gặp. Kết quả nghiên cứu có thể ứng dụng trong phục vụ sản xuất và đào tạo bậc cao.
Từ khóa: *Biến dạng, Chuyển vị, Tải trọng, Mặt trung bình, Môđun đàn hồi.*

1. Đặt vấn đề

Trong thực tế kỹ thuật, ta rất hay gặp các bài toán về vỏ trụ tròn có cấu tạo đối xứng trục cả về tải trọng và kết cấu hình học. Đó là các bài toán xác định ứng suất trong nồi hơi hình trụ chịu áp lực hơi nước, trong bể chứa hình trụ có trục thẳng đứng chịu áp lực của chất lỏng bên trong ngàm ở đáy vỏ. Đó là hai vỏ trụ chịu áp lực bên trong được nối với nhau bằng một mặt bích hoặc một đai gia cường nào đó rất cứng. Mối nối này ngăn cản sự giãn nở của mép vỏ liên kết với đai, đường sinh của vỏ ở vùng gần đai bị uốn. Khi nghiên cứu ứng suất nhiệt trong vỏ trụ cho thấy rằng nếu nhiệt độ không thay đổi theo chiều dày vỏ mà chỉ thay đổi theo chiều dài vỏ trụ ta cũng có bài toán thuộc họ bài toán kể trên. Do đó việc tính toán biến dạng của các vỏ trụ này có ý nghĩa quan trọng trong thiết kế và sản xuất.

2. Đối tượng và phương pháp nghiên cứu

Bài toán được tính toán trên mô hình một vỏ trụ tròn đối xứng, chịu áp lực vuông góc với mặt vỏ.



Hình 1

Muốn có các phương trình cần thiết để tính các vỏ này ta phải khảo sát một phân tố được tách ra (Hình 1) từ mặt trung bình của vỏ bằng hai mặt phẳng chứa trục vỏ làm với nhau một góc dθ và hai mặt phẳng vuông góc với trục vỏ cách nhau một đoạn dx, trên ba phương diện sau đây: tĩnh học, hình học và vật lý (Định luật Hooke).

3. Kết quả nghiên cứu

Kết hợp ba phương diện tĩnh học, hình học và vật lý, ta đi đến một phương trình cân bằng theo chuyển vị đúng cho mọi bài toán về vỏ trụ tròn có biến dạng đối xứng trục dưới dạng sau đây [1]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2W}{dx^2}\right)+\frac{Eh}{R^2}W=q_r(x) \tag{1a}$$

Khi h = const trên toàn vỏ thì (1a) có dạng đơn giản hơn:

$$D\frac{d^4W}{dx^4}+\frac{Eh}{R^2}W=q_r(x) \tag{1b}$$

Trong các phương trình này $q_r(x)$ là áp lực vuông góc với mặt vỏ; h – chiều dày vỏ; E – mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu vỏ; R – bán kính mặt trung bình của vỏ.

Ta ký hiệu: $k=\frac{Eh}{R^2}$; $t=\frac{x}{m}$; $D=\frac{Eh}{12(1-\mu^2)}$ là độ cứng của vỏ; μ - hệ số Poisson; $m^4=\frac{4D}{k}$.

Với biến số mới không thứ nguyên t, ta viết lại phương trình (1b) như sau:

$$D\frac{d^4W}{m^4dt^4}+kW=q_r(mt)$$

Hay nhân cả hai vế với $\frac{4}{k}$ ta có:

$$\frac{d^4W}{dt^4}+4W=f(t) \tag{2}$$

Trong đó: $f(t)=\frac{4}{k}q_r(mt)$ là hàm tải trọng ngoài.

Khi không có tải trọng ngoài f(t) = 0, ta có phương trình thuần nhất tương ứng:

$$\frac{d^4W}{dt^4}+4W=0 \tag{3}$$

Nghiệm tổng quát W(t) của phương trình có vế phải (2) gồm tổng nghiệm tổng quát $W_1(t)$ của phương trình (3) và nghiệm riêng $W_2(t)$ của phương trình (2). Cụ thể là:

$$W(t) = W_1(t) + W_2(t) \quad (4)$$

Sau khi tìm được các nghiệm của phương trình đặc trưng $r^4 + 4 = 0$ của (3), Viện sĩ Crưlốp đã tổ hợp được các nghiệm riêng độc lập tuyến tính này để có nghiệm tổng quát $W_1(t)$ của (3) như sau:

$$W_1(t) = C_1 V_1(t) + C_2 V_2(t) + C_3 V_3(t) + C_4 V_4(t) \quad (5)$$

Các hàm $V_k(t)$, (k = 1, 2, 3, 4) có tên gọi là hàm Crưlốp và có dạng cụ thể:

$$V_1(t) = cht\cos t\,;\; V_2(t) = \frac{1}{2}(cht\sin t + sht\cos t)\,;$$

$$V_3(t) = \frac{1}{2}cht.\sin t\,;\; V_4(t) = \frac{1}{4}(cht.\sin t - sht.\cos t)$$

Các hàm Crưlốp có các thuộc tính quan trọng sau đây:

$$V_1^{'}(t) = -4V_4(t)\,;\; V_2^{'}(t) = V_1(t)\,;\; V_3^{'}(t) = V_2(t)\,;$$
$$V_4^{'}(t) = V_3(t) \quad (7)$$

Và với t = 0 thì:

$$V_1(0) = 1;\; V_2(0) = V_3(0) = V_4(0) = 0; \quad (8)$$

Các thuộc tính này giúp xác định dễ dàng các hằng số C_k trong (5).

Mục đích của nghiên cứu này là nhằm cố gắng thiết lập một công thức tổng quát duy nhất nghiệm riêng $W_2(t)$ sao cho vừa đơn giản và vừa dễ sử dụng cho mọi quy luật chất tải đối xứng lên vỏ. Theo phương pháp toán tử Laplace, ta ký hiệu hàm ảnh hưởng của hàm ban đầu (hàm gốc) $W_2(t)$ là Φ(P) với P là tham số. Ảnh hưởng của tải trọng f(t) là hàm $F(P) = P\int_0^{\infty} e^{-Pt}.f(t)dt$. Quan hệ này được ký hiệu là: $F(P) \xrightarrow{\cdot} f(t)$; quan hệ vi phân giữa hàm ảnh và hàm ban đầu $W_2(t)$ theo các định lý vi phân trong phép toán tử thì:

$$W_2^{'}(t) \xrightarrow{\cdot} P\Phi\,;\; W_2^{''}(t) \Rightarrow P^2\Phi\,;$$
$$W_2^{'''}(t) = P^3\Phi\,;\; W_2^{(IV)}(t) = P^4\Phi\,.$$

Thay các quan hệ này vào (2) ta có phương trình sau đây:

$$P^4\Phi + 4.\Phi = F(P)$$

hay: $(P^4 + 4).\Phi = F(P)$

Do đó, ảnh của hàm ban đầu (hàm gốc cần tìm) là: $\Phi(P) = \frac{1}{P^4+4}.F(P)$ (9)

Khai triển ra các phân số nguyên tố đối với $\frac{1}{P^4+4}$ ta có:

$$\frac{1}{P^4+4} = \frac{1}{8}.\frac{P+2}{(P+1)^2+1} - \frac{1}{8}.\frac{P-2}{(P-1)^2+1} \quad (10)$$

Thay kết quả này vào (9), ta đi đến hàm ảnh của hàm cần tìm:

$$\Phi(P) = \left[\frac{1}{8}.\frac{P+2}{(P+1)^2+1} - \frac{1}{8}.\frac{P-2}{(P-1)^2+1}\right].F(P) \quad (11)$$

Hàm gốc tương ứng với ảnh (10) là:

$$\frac{1}{8}[e^{-t}.\cos t + e^{-t}.\sin t - e^{t}.\cos t + e^{t}.\sin t]$$
$$= \frac{1}{4}[cht\sin t - Sht\cos t] = V_4(t)$$

Ta tìm được hàm ban đầu là nghiệm riêng $W_2(t)$ của (2) như sau:

$$\Phi(P) = \frac{1}{P^4+1}F(P) \xrightarrow{\cdot} V_4(t)f(t) = f(t).V_4(t)$$
$$= \int_0^t V_4(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)V_4(\tau)d\tau = W_2(t)$$

hay: $W_2(t) = \int_0^t V_4(t-\tau)f(\tau)d\tau$ (12)

Theo (4), nghiệm tổng quát của phương trình đầy đủ (2) là:

$$W(t) = C_1V_1(t) + C_2V_2(t) + C_3V_3(t) + C_4V_4(t)$$
$$+ \int_0^t V_4(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (13)$$

Chú ý đến các quan hệ (7), các đạo hàm của $W_2(t)$ như sau:

$$W_2^{'}(t) = \int_0^t V_3(t-\eta)f(\eta)d\eta\,;$$
$$W_2^{''}(t) = \int_0^t V_2(t-\eta)f(\eta)d\eta\,;$$
$$W_2^{'''}(t) = \int_0^t V_1(t-\eta)f(\eta)d\eta$$

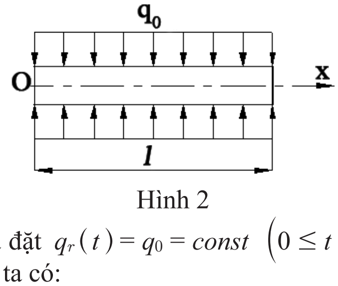
Các quan hệ này là để tính toán các thành phần nội lực và xây dựng các điều kiện biên trong vỏ. Cuối cùng từ các điều kiện biên đã được xác lập ta được hằng số C_1, C_2, C_3, C_4.

Các thành phần nội lực trong vỏ được tính theo công thức thông thường theo W(t). Cụ thể là:

$$N_\theta = -\frac{EhW(t)}{R}\,;\; M_\theta = \upsilon.M_x\,;\; M_x = -D\frac{d^2W}{dx^2} \quad (14)$$

Công thức tổng quát (12) cho phép xác định nghiệm riêng $W_2(t)$ với quy luật chất tải bất kỳ lên vỏ. Ta hãy khảo sát một số trường hợp thường gặp:

a) Trường hợp tải trọng phân bố đều dọc theo dải hẹp đường sinh vỏ (Hình 2):



Hình 2

Ta đặt $q_r(t) = q_0 = const$ $\left(0 \le t \le \frac{l}{L} = 1\right)$ theo (12) ta có:

$$W_2(t) = q_0\int_0^t W_4(t-\tau)d\tau = -\frac{1}{4}q_0\int_0^t V_1^{'}(t-\tau)d\tau$$
$$= \frac{1}{4}q_0(1 - cht\cos t)$$

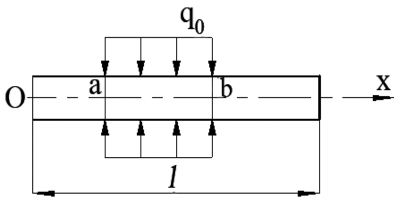
b) Khi tải trọng phân bố đều trên một đoạn [a;b] của dải đường sinh (Hình 3):

Ta ký hiệu: $\beta_1 = \frac{a}{L}$; $\beta_2 = \frac{b}{L}$, $(\beta_1 \le t \le \beta_2)$

Khi đó:

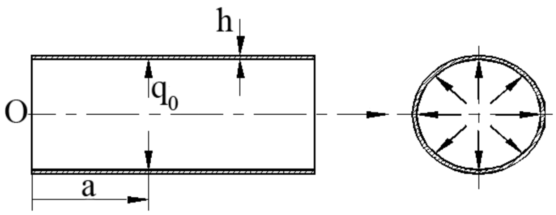
$$W_2(t) = q_0 \int_{\beta_1}^{\beta_2} V_4(t-\tau)d\tau = -\frac{1}{4} q_0 \int_{\beta_1}^{\beta_2} V_1'(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{4} q_0 [V_1(t-\beta_2) - V_1(t-\beta_1)]$$



Hình 3

c) *Trường hợp tải trọng tập trung phân bố đều tại x = a trên một vành có chu vi mặt cắt tròn* $(\frac{a}{L} = \beta_1)$ (Hình 4):



Hình 4

Gọi δ(x – a) là hàm xung của Dirác, ta có thể viết phương trình (1b) theo δ(x – a) như sau:

$$D\frac{d^4W}{dx^4} + kW = q_0\delta(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{d^4W}{dt^4} + 4W = \frac{q_0}{kL}\delta(t-\beta_1) \qquad (15)$$

Thực hiện các phép tính như trường hợp $q_0(x)$ có quy luật bất kỳ ở trên ta sẽ đi đến phương trình ảnh của (15) là $\Phi(P) = \frac{1}{P^4+4} . 1 . \frac{P}{kL}$ và nghiệm riêng của (15) có dạng:

$$W_2(t) = \frac{q_0}{kL} V_4(t-\alpha_1) . \sigma_0(t-\alpha_1)$$

Ở đây $\sigma_0(t - \alpha_1)$ là hàm xung đơn vị của Heaviside.

4. Kết luận

Nghiên cứu vừa giới thiệu cho phép giải quyết hai nhiệm vụ rất cơ bản là phục vụ sản xuất và đào tạo bậc cao. Về phương diện ứng dụng vào sản xuất nó là công cụ đắc lực giúp các nhà thiết kế nhanh chóng thu được câu trả lời chính xác về độ bền và độ cứng của vỏ để thiết kế một cách tối ưu nhất cả về thời gian, sức lực và tiền bạc. Về phương diện đào tạo, nó cho phép nâng cao chất lượng, nội dung đào tạo nhằm chống sự thiếu hụt kiến thức cho các học viên sau đại học trong điều kiện quỹ thời gian quá eo hẹp trong khi khối lượng kiến thức cần cho họ ngày một nhiều.

Tài liệu tham khảo

[1]. Đặng Việt Cương (2008), *Sức bền vật liệu toàn tập*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
[2]. Bùi Trọng Lựu, Nguyễn Văn Vượng (2008), *Bài tập Sức bền vật liệu*, NXB Giáo dục Việt Nam.
[3]. Đặng Việt Cương, Khổng Doãn Điền, Nguyễn Trọng Hùng, Nguyễn Minh Tuấn (2012), *Giáo trình Cơ học ứng dụng 2*, NXB Giáo dục Việt Nam.
[4]. Lều Thọ Trình (2001), *Cơ học kết cấu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
[5]. Trần Minh Tú (2011), *Bài giảng Lý thuyết tấm và vỏ mỏng*, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội.

CALCULATING DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL WITH SYMMETRICAL GEOMETRIC STRUCTURE, SYMMETRICAL BENDING LOAD

Abtract:
This paper presents a method for calculating the deformation of the cylindrical shell with symmetrical structure both in payload and geometric structure. In cornerstones of statics, geometry and physics, researcher have come up with a general formula for calculating deformation of cylindrical shell with symmetrical bending load. The research results can be applied in the service of production and higher education.

Keywords: *Deformation, Transposition, Load, Average Surface, Elastic Modulus.*